

# Svingninger av betongelementer

## Forord

## 1 Problemstilling

## 2 Kriterierfor vurdering av svingninger

- 2.1 Generelt
- 2.2 Laster fra menneskelige aktiviteter
- 2.3 Laster fra maskiner og installasjoner
- 2.4 Menneskelig følsomhet i bygninger
- 2.5 Kriterier for fotgjengerbroer

## 3 Beregningsmetoder og lastmodeller

- 3.1 Forutsetninger, definisjoner
- 3.2 Sirkelfrekvens, frekvens og svingetid
- 3.3 Dynamisk konstruksjonsrespons
- 3.4 Aerobic som periodisk støtlast

## 4 Beregningsanvisninger, eksempler, verifikasjon

- 4.1 Betongelementbygg
- 4.2 Systemvalg, frekvenskontroll, aktsomhetsregler
- 4.3 Bruk av regneark
- 4.4 Nyttige beregningsantagelser
- 4.5 Svingedempende tiltak
- 4.6 Beregningseksempler
- 4.7 Verifikasjon

## 5 Utførelse av målinger

- 5.1 Hensikt
- 5.2 Måleutstyr
- 5.3 Evaluering av måleresultater

## Referanser

## Forord

Betongelementer benyttes ofte som dekker i kontor- og industribygg. De finner også hyppig anvendelse som dekker i idrettsbygg og forsamlingslokaler. Felles for disse bygg er at de kan utsettes for laster av dynamisk karakter, forårsaket av menneskelige aktiviteter eller maskiner.

Den foreliggende publikasjon har til hensikt å belyse svingningsproblematikk for betongelementer samt å stille et enkelt beregningsverktøy til disposisjon og som kan benyttes til kontroll av svingninger. Publikasjonen som utgis på elektronisk form, er delt i tre deler, en tekstdel, et regneark for beregninger samt en presentasjonsdel.

I tekstdelen behandles aktuelle akseptkriterier mht svingninger og menneskelige reaksjoner. Videre behandles det teoretiske grunnlag for de beregninger som legges til grunn for det regneark som her kan benyttes til kontroll av svingninger. Presentasjonsdelen er en tekst-kortversjon som er laget for presentasjoner for informasjon og/eller opplæring.

Publikasjonen er utarbeidet på oppdrag av Betongelementforeningen.

Den foreliggende utgave (januar 2005) er en oppdatert versjon av det regneark som utarbeidet i 2002. Versjonen inneholder muligheter til å undersøke svingeforhold ved kontinuerlige bjelker over to og tre spenn. Videre er mulighetene til å kontrollere og vurdere beregningsresultatene i forhold til akseptkriterier utvidet. Kun mindre tilføyelser er gjort i tekst og presentasjonsdelen.

...



Fig. 1.1  
Kontor – industribygg

## 1 Problemstilling

Betongelementer benyttes ofte som dekker i kontor- og industribygg. De finner også hyppig anvendelse som dekker i idrettsbygg og forsamlingslokaler. (Figur 1.1).

Til enklere fotgjengerbroer benyttes også standardiserte betongelementer.

Felles for disse bygg og konstruksjoner er at de utsettes for laster av dynamisk karakter, forårsaket av menneskelige aktiviteter eller maskiner.

I kontor- og industribygg kan maskinelt utstyr forårsake vibrasjoner. Ventilasjonssystemer og roterende maskiner er eksempler på dette. Resonansfenomener må unngås. Videre kan rystelser overføres til et bygg gjennom grunnen fra trafikk, spunting, peling, sprengninger etc.



Fig. 1.2  
Idrettsbygg, aerobic

I et idrettsbygg er sportsaktiviteter som løp, hopp og sprang av dynamisk karakter. Spesielt kan rytmiske aerobic-aktiviteter forårsake uønskede svingninger i dekker (Fig. 1.2). Dette har sammenheng med faren for at det kan oppstå resonans.

Lastfrekvensen for aerobic ligger vanligvis på 1.8-3.4 Hz. Med en lastfrekvens på 2.5 Hz, (dvs en periode 0,4 s) vil lasten kunne opptre periodisk i takt med hver annen svingning når konstruksjonen svinger med en egenfrekvens på 5.0 Hz.



Fig. 1.3  
Tribuneanlegg

Det betyr at det sikkerhetsmessig og bruksmessig må settes krav til konstruksjonens svingeegenskaper. Dette har betydning for konstruktiv utforming.

Muligheter er tilstede for at resonansfenomener også kan oppstå ved taktfaste bevegelser i forsamlingslokaler og på tribuneanlegg hvor dans og rockekonsserter finner sted (Fig. 1.3).

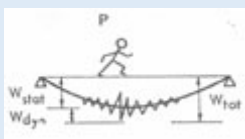


Fig. 1.4  
Mennesker i bevegelse

Taktfast marsj for eksempel over slanke fotgjengerbroer eller maskinelt utstyr som forårsaker resonansfenomener kan få alvorlige følger (Fig. 1.4 og 1.5).

I den foreliggende publikasjon belyses svingningsproblematikk som kan være aktuelle i forbindelse prosjektering av konstruksjoner og bygg hvor det benyttes betongelementer. Det er satt opp et enkelt beregningsverktøy (regneark) som kan benyttes til kontroll av svingninger. Det teoretiske grunnlaget for beregningsverktøyet er vist, samtidig som det gis anvisninger og beregningseksempler.

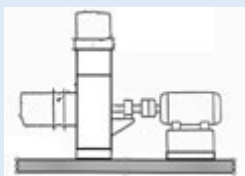


Fig. 1.5  
Maskinelt utstyr

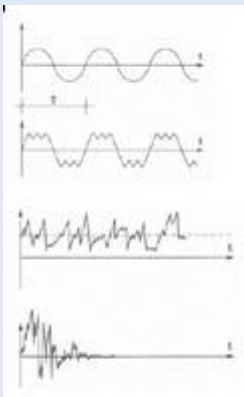


Fig. 2.1  
Periodiske og ikke periodiske svingninger

## 2 Kriterier for vurdering av svingninger

### 2.1 Generelt

Det finnes flere kriterier for vurdering av svingninger. Vi skiller mellom kriterier for

- konstruksjonens påkjenninger og
- menneskelig følsomhet

Det førstnevnte punkt går på konstruksjonenes styrke og sikkerhet og kan beregnings- og dimensjoneringsmessig kontrolleres. Forskjellige typer svingninger er vist i figur 2.1

Med hensyn til den menneskelige følsomhet berører dette konstruksjonens bruksegenskaper. Det finnes såkalte "komfort-kriterier" til en konstruksjons brukstilstand. Oppfylles ikke disse kan bygget få en verdiforringelse. Dersom svingningene er merkbart store, reises det også ofte spørsmål av sikkerhetsmessig karakter av brukerne.

Krav mht konstruktive påkjenninger som følge av dynamisk påkjenning og vibrasjoner angis vanligvis i konstruksjonsstandardene. Konstruktive påkjenninger relateres ofte til deformasjoner og spenninger. Kontroll av utmattingstilstanden er et eksempel på dette.

Krav til begrensning av nedbøyninger i konstruksjons-standardene kan indirekte inkludere at en vil unngå en uønsket svingningsømfintlighet.

Vibrasjonskrav angis normalt i form av akseptgrenser mht akselerasjoner og hastigheter, noe avhengig av frekvens. Kravene kan variere for forskjellige konstruksjonstyper og deres bruksområde. (figur 2.2)

Menneskelig komfort, helse og arbeidsevne relateres ofte til akselerasjoner og hastigheter og tid (varighet). Likeså kan funksjonalitet av fintfølende utstyr samt bygningsskader relateres til akselerasjoner og svingehastigheter. Både internasjonale og nasjonale regler er utarbeidet for dette og de vil være retningsgivende for vurdering av vibrasjoner.

For å unngå uønskede svingninger og vibrasjoner i en konstruksjon eller i et bygg, forutsettes at konstruktøren har kunnskap om når slike fenomener kan oppstå, og hvis det er tilfelle, at det kan gjennomføres en responsanalyse. Det krever igjen en lastbeskrivelse.

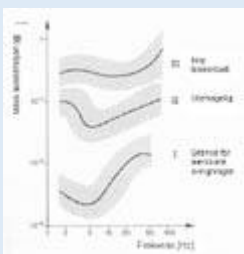


Fig. 2.3  
Anbefalte maksimalverdier for akselerasjoner ut fra krav om menneskelig komfort [4]

### 2.2 Laster fra menneskelige aktiviteter

I tabell 2.1 er det angitt data for forskjellige vibrasjonskilder for konstruksjoner, deriblant typiske frekvenser for menneskelige aktiviteter. [2].

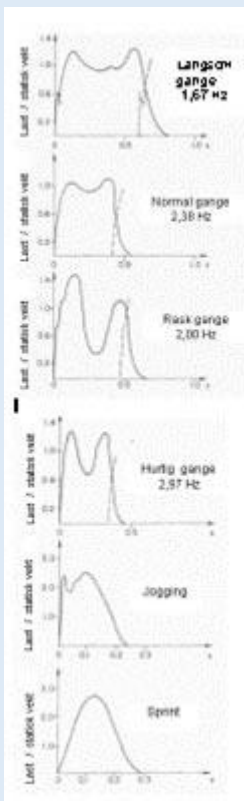


Fig. 2.4

Form og størrelse på last (last/statisk vekt) ved gange, jogg og sprint [2]

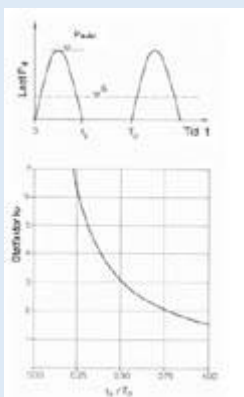


Fig. 2.5

Støtfaktoren er avhengig av forholdet "kontakt-tiden"  $t_p$  og "skritt-tid"  $T_p$

Videre er det angitt grenseverdier mht menneskelig følsomhet overfor svingninger. I det følgende skal disse opplysninger sammenstilles samtidig som opplysninger fra [2] trekkes frem

Tabell 2.1 Typiske frekvenser ved menneskelige aktiviteter [1]

| Aktivitet                                             | Frekvens   |
|-------------------------------------------------------|------------|
| Gange med kontinuerlig gulvkontakt                    | 1.4-2.6 Hz |
| Løping med diskontinuerlig gulvkontakt                | 2.0-3.5 Hz |
| Hopping Rytmisk hopping på stedet, f.eks., aerobic    | 1.8-3.4 Hz |
| Dansing, klassisk og moderne dans, f.eks. vals, rumba | 1.5-3.0 Hz |
| Popkonsert Rytmisk hopping av entusiastisk publikum   | 1.5-3.0 Hz |

En vanlig håndregel når det skal dimensjoneres for vibrasjoner fra gange, løping og lignende, er at dekkets resonansfrekvens skal være høyere enn det dobbelte av høyeste lastfrekvens. For gangtrafikk vil dette si resonansfrekvens høyere enn 5,2 Hz.

Tilsvarende håndregel gjelder for dans og sportsaktiviteter. Man bør her gå noe høyere opp i dekkfrekvens når man risikerer taktfast eksitasjon fra mange personer samtidig. Resonansfrekvens for dekker for sportsaktiviteter bør ligge høyere enn 8 Hz, og for dansegulv høyere enn 7 Hz. Det angis imidlertid at en bør vurdere den enkelte situasjon for seg, og blant annet se på planløsning og dempningsforhold.

I [2] er det angitt mere detaljerte opplysninger vedrørende frekvens- og lastforhold ved menneskelige aktiviteter som gange, løp og hopp. Noen av disse er vist i figurene 2.4 og 2.5. En bør merke seg følgende: Hastigheten på den aktiviteten som utøves (dvs gange, løp, hopp) er den viktigste parameter mht last og dynamisk respons. Underlag, (som gulv og beleg) og også fotteøy har mindre effekt på frekvens og last [2].

I figur 2.4 vises eksempler på tid/lastkurver (impulslaster) for aktiviteter gange, jogg og sprint. Forholdet last/statisk vekt er angitt på diagrammets ordinat. Ved langsom gange (1.67 Hz) er impulslasten pukkelformet (trapesformet) med maksimalverdi ca 1.2 ganger statisk vekt. Ved hurtig gange (2.0-3.0 Hz) kortes støttiden, støtlasten opptrer med to topper og den har en maksimalverdi ca 1.4 ganger statisk vekt. Ved jogg og sprint har støtformen mere en sinus- eller parabelform, en kortere støttid og en maksimalverdi opp mot 3 ganger statisk vekt. Sammenheng mellom frekvens på aktivitet (gange, hopp), varighet av kontakt med gulv og forhold maksimallast /statisk vekt (støtfaktor) er vist i figur 2.5.

Ved løp/hopp kan maksimallast utgjøre som tidligere nevnt 3 ganger statisk vekt. Aktiviteter som hurtig løp, hopp og aerobic vil ha bevegelser som periodevis ikke har kontakt med underlaget. Lasten vil opptre som en periodisk last som tilnærmet kan settes å ha en halv-sinusform som vist i figur 2.5. Støtfaktoren vil være avhengig av forholdet mellom "kontakt-tiden"  $t_p$  og skritt-tid  $T_p$ . Den viste kurven er basert på teoretiske beregninger. Sammenlignes den beregnede støtfaktor med verdier fra forsøk som angitt i figur 2.4 stemmer verdiene godt ved gang/hoppfrekvens på 3 Hz, men gir

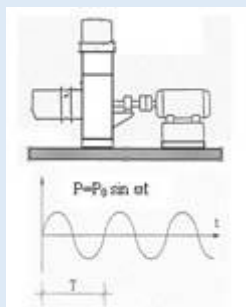


Fig. 2.6

Lastbilde fra roterende maskiner

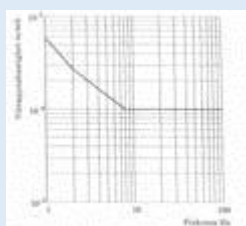


Fig. 2.7

Basiskurve for fleraksede vibrasjoner i bygninger fra NS-ISO 2631-2 [2]

ellers litt for høye verdier ved skrittfrekvens 2 Hz og raske hopp på 4 Hz. Oppsummert gir beregningsverdiene pålitelige verdier mht støtfaktor og kan benyttes i overslagsberegninger. Resultatene vil være på den konservative (sikre) side.

## 2.3 Laster fra maskiner og installasjoner

Vibrasjoner fra maskiner og installasjoner i en bygning kan gi både lavfrekvente, følbare vibrasjoner og mer høyfrekvente vibrasjoner. I noen tilfeller kan det være nødvendig å dimensjonere bærende konstruksjoner for dynamisk last ut fra turtallet for en maskin. Avgjørende faktorer er da rotorens masse  $m$ , og ubalansen (eksentrisiteten)  $e$ . Den dynamiske lasten fra en maskin med turtall  $n$ , (omdr/min) kan beregnes av uttrykket

$$F = m \cdot e \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{3600} \cdot n^2 \quad (2.1)$$

## 2.4 Menneskelig følsomhet i bygninger

Mennesker reagerer på svingninger. Grenser for tolererbare svingninger er variable og avhengig av bruk og brukere. Vurderinger av en konstruksjons svingeforhold mht menneskelig følsomhet hører derfor hjemme i vurdering av en konstruksjons bruksgrense-tilstand.

I Betongelementboken [2] refereres til NS-ISO 2631-2 hvor det er angitt en basiskurve, gjengitt i figur 2.7. Kurven er i standarden gitt som et informativt vedlegg og ikke som standard grenseverdi.

Mht menneskelig følsomhet settes det normalt grenser til akselerasjoner når det gjelder vibrasjoner med frekvenser fra 1-10 Hz, mens for vibrasjoner med frekvenser større enn 10 Hz, settes det normalt krav til hastigheter. I [2] er det referert til følgende grenseverdier som akseptkriterier for fysiologiske svingninger:

Tabell 2.2 Grenseverdier-akseptkriterier mht merkbare vibrasjoner [2]

| Virkning på mennesker       | Frekvens<br>1-10 Hz<br>$a_{maks}$ [mm/s <sup>2</sup> ] | Frekvens<br>10-100Hz<br>$v_{maks}$ [mm/s] |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| Ikke merkbare               | 10                                                     | 0.16                                      |
| Kan akkurat merkes          | 40                                                     | 0.64                                      |
| Tydelig merkbare            | 125                                                    | 2.0                                       |
| Sjenerende                  | 400                                                    | 6.4                                       |
| Ubehagelige                 | 1000                                                   | 16.0                                      |
| Smertefulle hvis vedvarende | >1000                                                  | >16                                       |

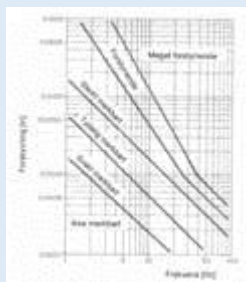


Fig. 2.8

Forhold frekvens/forskyvning og menneskelig følsomhet. [2]



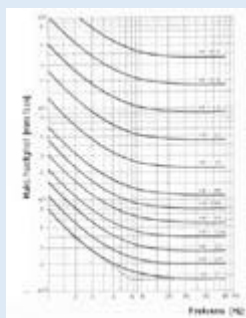


Fig. 2.9  
Diagram for bestemmelse av  
KB-verdi ut fra frekvens og  
svinge-hastighet [2]

Den menneskelige følsomhet relatert til frekvens og akselerasjon er eksempelvis tidligere vist i figur 2.2 mens forholdet frekvens og forskyvning er vist i figur 2.8 (NB forskyvning er i diagrammet angitt i inch!) [2]

I tillegg til tabell 2.2 og diagrammene gjengitt i figurene 2.7-2.8 skal en klassifiseringsmetode benyttet i DIN 4150, også referert til i [2] bli presentert. Som mål benyttes en KB-verdi beregnet ut fra en konstruksjons svingeintensitet (forskyvning og frekvens). KB-verdien kan også bestemmes ut fra oppsatte diagrammer. I figur 2.9 er et slikt diagram vist for svinge-hastighet og frekvens. Det finnes tilsvarende diagrammer for forholdet mellom forskyvning og frekvens samt akselerasjon og frekvens. I et gitt tilfelle kan svingeverdien KB bestemmes enten ved beregning eller ved direkte målinger. Den aktuelle KB verdi sammenlignes deretter med verdier i en klassifiseringstabell som er gjengitt i tabell 2.3. De krav som må settes til selve konstruksjonen er at den oppviser nødvendig stivhet for dynamiske påkjenninger slik at den dynamiske oppførsel ligger innenfor de aksepterte toleransegrenser.

Tabell 2.3 Retningsgivende KB-verdier for vurdering av tolererbare svingninger og rystelser mht. den menneskelige følsomhet

|   |                                  |             | KB-verdi                          |                               |
|---|----------------------------------|-------------|-----------------------------------|-------------------------------|
|   | Bygeområde                       | Tid         | Vedvarende og gjentatte rystelser | Sjelden opptredende rystelser |
| 1 | Boligområde                      | Dag<br>Natt | 0.2 (0.15)<br>0.15 (0,1)          | 4.0<br>0.15                   |
| 2 | Tettbygd område, mindre sentra   | Dag<br>Natt | 0.3 (0.2)<br>0.2                  | 8.0<br>0.2                    |
| 3 | Område m. små-industri og kontor | Dag<br>Natt | 0.4<br>0.3                        | 12.0<br>0.3                   |
| 4 | Industriområde                   | Dag<br>Natt | 0.6<br>0.4                        | 12.0<br>0.4                   |
| 5 | Spes. områder etter bruk         | Dag<br>Natt | 0.1 - 0.6<br>0.1 - 0.4            | 4 - 12<br>0.15 - 0.4          |

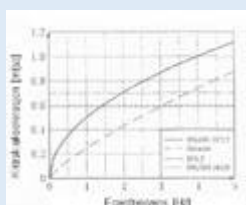


Fig. 2.10  
Sammenlikning normgitte  
komfortkriterier for fotgjenger-  
broer [3]

## 2.5 Kriterier for fotgjengerbroer

For fotgjengerbroer er det i flere normer spesifisikasjoner for tolererbare akselerasjoner. I tabell 2.4 er reglene i fire utvalgte standarder ført opp [3] og en grafisk sammenlikning er vist i figur 2.10.

Tabell 2.4 Sammenlikning komfortkriterier

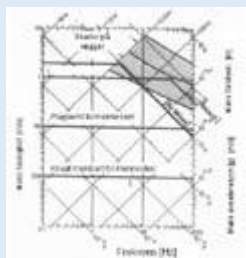


Fig 2.11  
Grenseverdier for menneskelig følsomhet og bygningsskader [2]

| Norm, Standard       | $\ddot{a}_{krit} [m/s^2]$ |
|----------------------|---------------------------|
| BS5400 og EC2.2      | $\frac{1}{2} \sqrt{f_0}$  |
| Ontario code (ONT83) | $\frac{1}{4} f_0^{0,78}$  |
| EC5.2                | 0,70                      |
| ISO/DIS 10137        | 0,59                      |

Det fremgår av dette at BS 5400, EC2-2 og ONT83 har frekvensavhengige kriterier, (egenfrekvens  $f_0$ ) mens Eurocode 5 del 2 og ISO/DIS 10137 har konstantverdier. For gangfrekvenser på ca 2 Hz gir samtlige standarder verdier mellom 0,59 og 0,7  $m/s^2$  med unntak av ONT83 som gir 0,43  $m/s^2$

## 2.4 Konstruksjonsmessige kriterier

Det stilles også krav til å begrense svingninger for å unngå skader på konstruksjoner. Mange av kriteriene refererer seg til vibrasjoner p.g.a. sprengninger, bygningsarbeider, maskiner etc. Flere kriteriene er gjengitt i [2]. Hvilke krav som skal settes for å unngå skader, er selvfølgelig avhengig av konstruksjonen eller byggverket. Grenseverdier uttrykt ved hastighet er gitt i Tabell 2.5. (opprinnelse fra KDT 046/72, øst-tysk standard). Videre gjengis i figur 2.11 et diagram som angir grenseverdier for menneskelig følsomhet og bygningsskader (opprinnelse Bureau of Mines) som kan benyttes

Tabell 2.5 Grenseverdier for menneskelig følsomhet og bygningsskader (opprinnelse Bureau of Mines) Kilde: [2]

|      | Kategori Type bygg                | Hastighet [mm/s] |
|------|-----------------------------------|------------------|
| I    | Historiske bygg                   | 2                |
| II   | Bolighus, delvis i tre            | 5                |
| III. | Vegg, skiver, bygg i mur          | 10               |
| IV   | Rammekonstruksjoner, stål, betong | 30               |



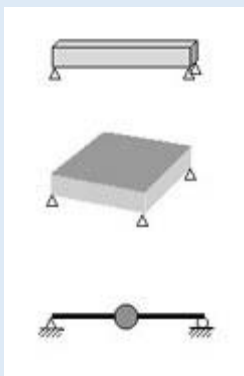


Fig. 3.1  
Bjelke og plate som  
enfrihetsgradsystem

## 3 Beregningsmetoder og lastmodeller

### 3.1 Forutsetninger, definisjoner

For beregning av den dynamiske respons på dekke-konstruksjoner p.g.a. menneskelige aktiviteter og maskinelt utstyr, benyttes her enkle beregningsmodeller og beregningsmetoder. Følgende kriterier legges til grunn:

- Som system benyttes bjelke- eller plate- modeller med en frihetsgrad.
- Forspennte betongelementer forutsettes uoppsprukket. (Her oppførsel som i stadium I).
- Konstruksjonsparametre forutsettes kjente ( geometri, materialverdier og masse.) Konstruksjonsdempning baseres på erfaringsverdier.
- Lastens størrelse og tidsavhengighet forutsettes kjent.
- Beregninger utføres ved hjelp av egne regneark.
- Egenfrekvensene bestemmes ut fra etablerte håndbokformler for bjelker og plater. Det kan tas hensyn til ulike randbetingelser.
- Dynamisk respons, beregnes i elastisk tilstand ved skrittvis tidsintegrasjon (lineær akselerasjon, dempet system)
- Resultatene av responsanalysen dvs de beregnede forskyvninger, hastigheter og akselerasjoner, vurderes opp mot akseptkriterier.

Dynamisk lastfaktor  $D_{DLF}$  defineres som forholdet

$$D_{DLF} = \frac{\delta_{dynamisk}}{\delta_{statisk}}$$

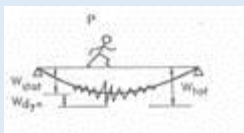


Fig. 3.2  
Virkning av dynamisk last

dvs virkning av forholdet dynamisk last/ statisk virkning av samme last. Den uttrykker en dynamisk forsterknings-faktor.

Som referanse for en dynamisk analyse tjener derfor de statiske deformasjoner. Konstruksjonenes egenfrekvens og dempning er viktige elementer i en responsanalyse. Vi skiller mellom følgende deformasjoner (figur 3.2):

- Statisk nedbøyning p.g.a. statisk last P
- Dynamisk tilleggsdeformasjon p.g.a. dynamisk last
- Total deformasjon lik summen av statisk og dynamisk deformasjon.

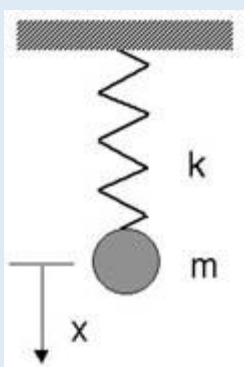


Fig. 3.3  
Fjærsystem

### 3.2 Sirkelfrekvens, frekvens og svingetid

Egenfrekvenser. Egenfrekvensen kan bestemmes når en kjenner konstruksjonens stivhet og masse.

Sirkelfrekvens

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(Formel 3.1)

hvor  $k$  = stivhet [N/m],  $m$  = masse [kg]  $\omega$  i [rad/sek]

Frekvens

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \omega$$

(Formel 3.2)

Svingetid

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

(Formel 3.3)

Frekvens  $f$  angis i normalt Hz (1/sek) og svingetid  $T$  i sekunder

Egenfrekvens fritt opplagt bjelke [2]

$$f_1 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{3EI}{l^3(m + 0.5m_b)}}$$

(Formel 3.4)

Egenfrekvens innspant bjelke [2]

$$f_1 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{7}{\pi} \sqrt{\frac{EI}{l^3(m + 0.375m_b)}}$$

(Formel 3.5)

hvor

$E$  = Elastisitetsmodul [N/mm<sup>2</sup>],  
 $I$  = Arealtregghetsmoment [mm<sup>4</sup>]  
 $l$  = Spennvidde [m]  
 $m_b$  = Fordelt masse, tilsvarende masse av konstruksjonenes egenvekt [kg/m]  
 $m$  = Konsentrert masse bestående av eksisterende last (ved aerobic antall personer)

Egenfrekvens for plater med sidekanter a,b. [2]

$$f_1 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\varphi_n}{a^2} \sqrt{\frac{Et^3}{\mu 12(1 - \nu^2)}}$$

(Formel 3.6)

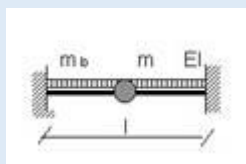
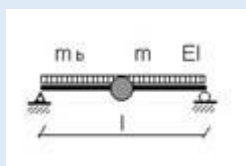


Fig. 3.4  
Bjeldmodeller

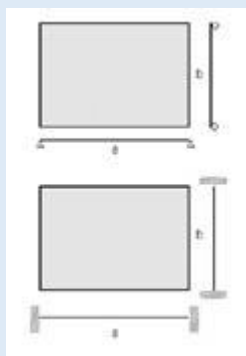


Fig. 3.5  
Platmodeller



Fig. 3.6  
Kontinuerlig bjelke over tre spenn

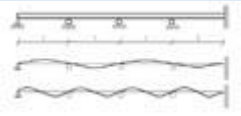


Fig. 3.7  
Kontinuerlig bjelke fire spenn

med:  $E$  = betongens E-modul [ $\text{N/m}^2$ ]  
 $\nu$  = Poissons tall  
 $t$  = Platetykkelse [ $\text{m}$ ]  
 $\gamma$  = Sideforhold  $a/b$ ,  $b$  = Sidekant [ $\text{m}$ ]  
 $\mu$  = masse pr areal [ $\text{kg/m}^2$ ]

Verdiene for  $\phi$  ved fritt opplegg ved fire render:

$$\phi_{1,1} = 1,57(1 + \gamma^2); \quad \phi_{2,1} = 6,28(1 + 0,25\gamma^2); \quad \phi_{1,2} = 1,57(1 + 4\gamma^2);$$

Verdiene for  $\phi$  ved innspenning ved fire render:

$$\phi_{1,1} = 1,57(5,14 + 3,13\gamma^2 + 5,14\gamma^4)^{0,5};$$

$$\phi_{2,1} = 9,82(1 + 0,298\gamma^2 + 0,132\gamma^4)^{0,5};$$

$$\phi_{1,2} = 1,57(5,14 + 11,56\gamma^2 + 39,06\gamma^4)^{0,5};$$

### Eigenfrekvens for kontinuerlige bjelker [6]

Eigenfrekvensen til to karakteristiske tilfeller angis.

(a) Kontinuerlig bjelke over tre spenn som vist i figur 3.6.  
 (NB korteste spennvidde angitt som  $l$ ) [6]

$$f_1 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1,927}{\pi} \sqrt{\frac{EI}{l^4(m_b)}}$$

(Formel 3.7)

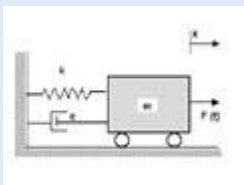


Fig. 3.8  
Beregningsmodell

(b) Kontinuerlig bjelke over fire spenn som vist i figur 3.7 Ensidig innspenning

$$f_1 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5,149}{\pi} \sqrt{\frac{EI}{l^4(m_b)}}$$

(Formel 3.8)

### 3.3 Dynamisk konstruksjonsrespons.

#### Elastisk oppførsel

Den dynamiske konstruksjonsrespons beregnes her på en en-frihetsgradsmodell, dvs den virkelige konstruksjonen erstattes med en forenklet modell hvor antall frihetsgrader er begrenset.

Utgangspunktet for beregningen er svingeligningen

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku = P$$

(Formel 3.9)

eller uttrykt for et ekvivalente erstatningssystem (betegnet med  $e$ )

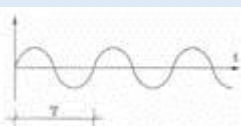


Fig. 3.9  
Harmonisk last

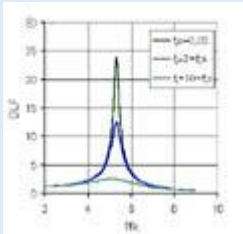


Fig. 3.10  
Resonans

$$m_e \ddot{u} + c_e \dot{u} + K_e u = P_e$$

(Formel 3.10)

Det er innført en ekvivalente masse ( $m_e = \kappa_m \cdot m$ ),

ekvivalente dempning ( $c_e = \kappa_d \cdot \rho c \dot{u}_{\max}$ ),

ekvivalente stivhet ( $K_e = \kappa_k \cdot P_{\max}$ ) og

ekvivalente belastning ( $P_e = \kappa_p \cdot \sigma_{ff}$ ).

For bjelker og plater kan koeffisientene  $\kappa$  bestemmes ut fra tabellene i lærebøker og håndbøker [3]

### Dynamisk respons ved harmonisk last

En konstruksjon utsettes for en tvungen svingning med påtrykt harmonisk last med maks amplitude  $P_0$  og frekvensen  $p$  som vist i figur 3.9. Forholdet mellom påtrykt frekvens  $p$  og konstruksjonens egenfrekvens  $f_1$  betegnes med  $\beta = p/f_1$ . Konstruksjonens deplning karakteriseres ved dempningsforholdet  $\lambda$  ( $\lambda = \delta/2\pi$  hvor  $\delta$  er det logaritmiske dekrement).

Ut fra svingeligningen for et dempet system uttrykkes den dynamiske lastfaktor

$$D_{DLF} = \frac{x_{\max}}{x_{\text{stat}}} = \frac{R}{P_0/k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\lambda\beta)^2}}$$

(Formel 3.11)

Den dynamiske lastfaktor er en funksjon av frekvensforholdet  $\beta$ , dvs forholdet mellom påtrykt frekvens og konstruksjonens egenfrekvens, og dempningsforholdet  $\lambda$ . De dynamiske påkjenninger og deformasjoner beregnes så ut fra statisk last forstørret med den dynamiske lastfaktor.

$$x_{\max} = D_{DLF} x_{\text{stat}}$$

(Formel 3.12)

### Dynamisk respons ved vilkårlig tidsavhengig belastning

Den numeriske prosedyren som kan benyttes for beregning av konstruksjonsresponsen baseres på en skrittvis integrasjon av akselerasjoner til hastigheter og videre til forskyvninger. Med dette kan systemets fjærkrefter bestemmes innen hvert tidsintervall. Det antas en lineær akselerasjon innen hvert tidsskritt. Videre må de ytre krefters tidsforløp være kjent.

Startverdiene (til tiden  $t=t_m$ ) for akselerasjon, hastighet og forskyvning forutsettes kjent (ofte settes lik 0). En ønsker å bestemme verdiene på

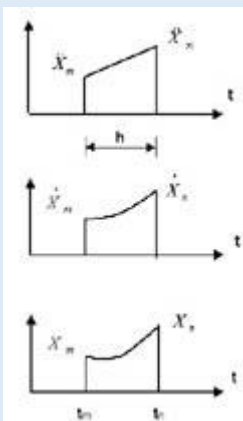


Fig. 3.11  
Antagelser for tids-  
integrasjonns

akselerasjon, hastighet og forskyvning etter et tidsintervall  $h$  etter start (tidspunkt  $t=t_n$ ). Ved å anta en lineær variasjon av akselerasjonen kan hastighet og forskyvning beregnes. [8]. Svingelikningen (3.9) kan da skrives for tids-punktet  $t_n$  (ett tidsskritt etter start eller forrige step):

$$M \cdot \ddot{X}_n + K \cdot \left[ X_m + \dot{X}_m \cdot h + \frac{1}{3} \cdot \ddot{X}_m \cdot h^2 + \frac{1}{6} \ddot{X}_n \cdot h^2 \right] = F_n$$

(Formel 3.13)

Av denne likning beregnes den :

$$\ddot{X}_n = \frac{F_n - K \left[ X_m + \dot{X}_m \cdot h + \frac{1}{3} \cdot \ddot{X}_m \cdot h^2 \right]}{\left[ M + \frac{1}{6} \cdot K \cdot h^2 \right]}$$

(Formel 3.14)

Forskyvningen til tidspunkt  $t_n$  beregnes som:

$$X_n = X_m + \dot{X}_m \cdot h + \left( \frac{1}{3} \cdot \ddot{X}_m + \frac{1}{6} \ddot{X}_n \right) \cdot h^2$$

(Formel 3.15)

og hastigheten

$$\dot{X} = \dot{X}_m + 0.5 \cdot (\ddot{X}_m + \ddot{X}_n) \cdot h$$

(Formel 3.16)

og ”fjærkraften”

$$F_s = X_N \cdot K$$

(Formel 3.17)

For å starte prosedyren ved tidspunkt  $t=0$  antar en normalt  $\dot{x}(0) = 0, x(0) = 0$  mens akselerasjonen beregnes som

$$\ddot{X}(0) = \frac{F(0)}{M}$$

(Formel 3.18)

Denne prosedyre er egnet til å sette opp i regneark.

### 3.3 Aerobic som periodisk støtlast [2]

Lasten fra rytmisk hopping beskrives ganske godt av periodiske sinusimpulser (figur 3.12). ”Peak”-verdien kan bestemmes ved å forlange at totallasten er

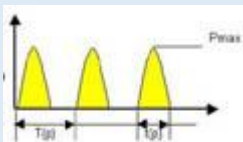


Fig. 3.12  
Aerobic som periodisk last

konstant. En får da:

$$F_{p,max} = F_0 \frac{\pi T}{2 t_d}$$

(Formel 3.19)

Ved Fourierutvikling av lasten kan denne uttrykkes:

$$a_n = \frac{4F_p P}{\pi(P^2 - n^2)} \cos \frac{n\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{P}\right)$$

(Formel 3.20)

$$F(t) = f_0 + \frac{4F_p}{\pi} \sum_{n=2,4,6} a_n \cos \frac{n\pi}{T_p} \left(t + \frac{T_p - t_p}{2}\right)$$

(Formel 3.21)

For tilfellet  $t_d = 0.5T$  kan dette skrives:

$$F(t) = F_0 + \frac{F_p}{2} \cos \frac{2\pi}{T_p} \left(t + \frac{T_p - t_p}{2}\right) + \sum_{n=4,8,12} \frac{8F_p}{\pi(4 - n^2)} \cos \frac{n\pi}{4} \cos \frac{n\pi}{T_p} \left(t + \frac{T_p - t_p}{2}\right)$$

(Formel 3.22)

Hvis en setter inn for  $T$  og  $t_d$  og tar med første ledd i den generelle summen, blir rekkeutviklingen:

$$F(t) = F_0 \left(1 - \frac{\pi}{2} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T_p} - 0.25\right) + \frac{2}{3} \cos 4\pi \left(\frac{t}{T_p} - 0.25\right)\right)$$

(Formel 3.23)

Det overstående uttrykk er godt egnet for håndregning og gir et godt uttrykk for lasten. Figur 3.13 viser den tidsavhengige lasten etter lign (3.23) med  $T_p = 0.4$  sec.

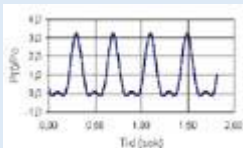


Fig. 3.13  
Rekkeutviklet last

## 4 Anvisninger

### 4.1 Betongelementbygg

Betongelementer som hulldekker og DT-elementer benyttes ofte som dekker i kontor- og industribygg. (Figur 4.1). Disse elementtyper finner også hyppig anvendelse som dekker i idrettsbygg og forsamlingslokaler. Til enklere fotgjengerbroer benyttes også standardiserte betongelementer.



Figur 4.1  
Betongelementbygg med dekke-elementer

Felles for disse konstruksjoner er at de kan utsettes for laster av dynamisk karakter som er forårsaket av maskiner eller menneskelige aktiviteter.

### 4.2 Systemvalg, frekvenskontroll, aksjonshets-regler



Ved prosjektering av bygg er det viktig, tidlig å fastslå om de opptredende laster er av dynamisk karakter.

Hvis dynamiske laster som kan forårsake svingninger opptrer, er en kontroll av svingeforholdene nødvendig. Uønskede svingninger kan nedsette en konstruksjonens bruksverdi.

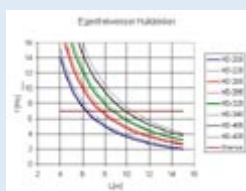
Norsk standard NS 3473 (jfr pkt 15.4) krever mht svingninger:

### **Svingninger:**

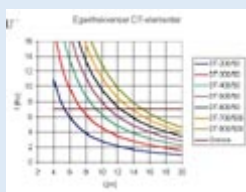
***"Dersom konstruksjon og laster er slik at betydelige svingninger kan oppstå, skal det påvises at disse er akseptable for bruken av konstruksjonen".***

Med "akseptable" kan det her refereres til de akseptkrav som er beskrevet i avsnitt 2. Med "påvisning" kan det refereres til a) enten en frekvens-kontroll som dokumenterer liten sannsynlighet for uønskede svingninger, alternativt b) en dokumentert svingeanalyse med beregning av frekvens, svingeamplitude, hastigheter og akselerasjoner.

For prosjektering av betongelementdekker er ofte det statisk system gitt ut fra ytre geometriske betingelser og byggemetode. Dekkeelementer som hulldekker og DT-elementer, anvendes oftest som fritt opplagte bjelker, men kontinuerlige bjelker kan også forekomme. Dekke-elementer kan i visse tilfelle ved "not og fjær" forbindelser, eller sammenspenning, også virke som plater.



Figur 4.2  
Egenfrekvenser hulldekker



Figur 4.3  
Egenfrekvenser DT elementer

Elementenes slankhet gir oftest en indikasjon på deres svingeømfintlighet. Som **aksomhetsregel** gjelder derfor at det for konstruksjonselementer som utsettes for dynamiske laster, i det minste gjennomføres et beregningsmessig overslag over egenvingefrekvens. Faller konstruksjonsegenfrekvensen, eller et multiplum av denne, sammen med frekvensen til maskinelt utstyr eller er mindre enn 7 Hz for dekker hvor det drives sportsaktiviteter, bør en nærmere svingeundersøkelse, foretas (jfr avsnitt 3).

I figurene 4.2 og 4.3 er egenfrekvensen til forskjellige hulldekke- og DT-elementer tegnet opp i diagramform. Diagrammene kan tjene som et hjelpemiddel ved prosjektering og gir en rask orientering om elementenes egenfrekvensene som funksjon av spennvidde. Korreksjoner i forhold til masse av last som er med i svingeprosessen må utføres i tillegg.

## **4.3 Bruk av regneark**

### **Generelt**

Som hjelpemiddel for beregning av dynamisk konstruksjonsrespons for betongdekkelementer er det utviklet et eget regneark. Regnearket som benytter Excel, har til hensikt å sette brukeren i stand til å gjennomføre en enkel dynamisk analyse av betongdekkelementer og fremskaffe den nødvendige dokumentasjon for konstruksjonselementers svingeforhold.



Figur 4.4  
Regneark for  
konstruksjonsrespons

Regnearket er bygget opp etter de forenklete beregningsforutsetninger og beregningsmetoder som er skissert i avsnitt 3.

Bruken av regnearket forutsetter en viss kjennskap til konstruksjonsdynamikk, og såvel bruken av de oppsatte hjelpemidler som valg av de dynamiske parametre og tolkning av resultatene krever et visst kritisk skjønn. Med riktig bruk skal utskrift fra regnearket kunne tjene som dokumentasjon mht kontroll av svingninger.

## Regnearkets oppbygging

Regnearket er bygget opp i følgende ark:

- Data
- Beregninger
- Resultater
- Kontroll

På dataarket leses alle nødvendige konstruksjonsdata som geometri, materialverdier, svingedata og lastparametre.

Fra dataarket kan tverrsnittsverdier for typiske hulldekke- og DT-elementer hentes opp i tabellform. Videre kan diagrammer for elementenes egenvingefrekvens (uten medvirkning av eventuell masse fra last) hentes frem. Dette til en overslagsmessig kontroll i prosjekteringsfasen.

I arket "laster" er tre lasttyper definert: Det er last-tilfellene "Aerobic", "Sinuslast" og "Impulslast".

De etterfølgende beregninger i arket "beregninger" gjennomføres for de tre definerte lasttilfeller (Aerobic-last, sinuslast og impulslast).

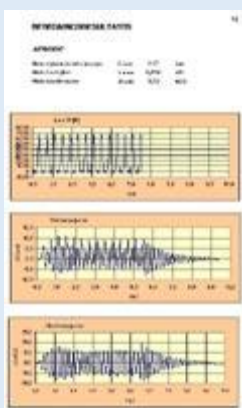
Resultatene presenteres i arket "resultater" og arket inneholder inngangsdata samt de resultater som karakteriserer elementets svingeegenskaper som egenfrekvens, maksimalverdier av deformasjon, svingehastighet og akselerasjon. I tillegg presenteres tidsserier av last, deformasjon og akselerasjon.

Til generell presentasjon kommenteres beregnings-metode og beregningsprinsipper.

Et tilleggark "kontroll" er føyet til regnearket. Med dette skal brukeren kunne kontrollere beregningene med alternative modeller, innspenningsforhold mm. Som eksempler kan en ved dette kontrollarket beregne innvirkning av innspenningsforhold ved bjelker, benytte modell som plate, studere dempnings innvirkning på resonans mm. Dette tilleggarket setter brukeren lettere i stand til å foreta parameterstudier og derved kunne ta beslutninger mht hvilke konstruktive tiltak som er mest effektive mht å unngå uønskede svingninger.



Figur 4.5  
Data-ark med innleste data



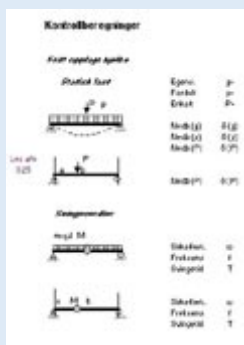
Figur 4.6  
Presentasjon av resultater

## 4.4 Nyttige beregningsantagelser

### System

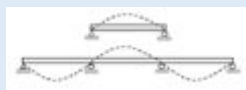
For den dynamiske analysen av betongdekkeelementer antas normalt samme system som benyttes ved den statiske beregning.

Som referanse og kontroll fra den dynamiske analyse anbefales det å beregne statisk nedbøyning av systemet p.g.a. egenvekt, nyttelast samt maksimalverdi av tidsavhengig last. Kontroll-beregningen tjener som referanseverdi og kontroll ved vurdering av resultater. (benytt "kontrollark" i regnearket)



Figur 4.7  
Kontrollark med alternative modeller

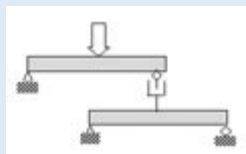
Ved prosjektering av bygg kan det ved dynamisk belastning være aktuelt å vurdere forskjellige spennvidders og systemers innvirkning på egenfrekvensen. Modeller med forskjellig innspenning, eventuelt kontinuerlige bjelker, plater kan være aktuelt. (benytt "kontrollark" i regnearket). En bør merke seg at virkningene av kontinuitet i bjelker på systemets egen-frekvens kan være begrenset i forhold til egenfrekvensen til en fritt opplagt bjelke. (figur 4.8)



Figur 4.8  
Svingeform kontinuerlig bjelke



Figur 4.9  
Opplegg av dekkelementer på dragere



Figur 4.10  
Koblet system

Ofte legges dekkelementer opp på dragere, enten av stål eller betong som vist i figur 4.9. Dragerne er kan i seg selv være svingeømfintlige. En frekvensanalyse av dragerne er i så fall påkrevet. Ved første tilnærming kan dekker og dragere betraktes som to separate systemer. Ved nærmere analyse bør systemene behandles som et koblet system. Ligger egenfrekvensene til dekkelementer og dragere (eller et multiplum av disse) langt fra hverandre, vil denne tilnærming kunne aksepteres dersom egenfrekvensene ligger utenfor det kritiske område for aktuelt maskinelt utstyr, eller menneskelige sportsaktiviteter. (For beregning av egenfrekvenser av ståldragere eller betongdragere kan det samme regneark benyttes, men med innleste data for drageren)

Dersom forutsetningene for å regne dekkelementer og dragere som separate systemer ikke er tilstede, anbefales analyse av et koblet system. Dette kan gjøres ved å benytte et dataprogram med dynamikk for rammer, alternativt kan den foreslåtte beregningsprosedyre for regneark som er beskrevet i avsnitt 4.5 (svingedempende tiltak) benyttes.

### Slakkarmert-spennarmert betong

Hulldekker og DT-dekkeelementer utføres som regel i forspennt betong. Konstruksjonselementene forholder seg derfor ved full forspenning i stadium 1, dvs i uoppsprukket tilstand. Det forekommer imidlertid at det benyttes slakkarmerte elementer, som f.eks. dragere i et rammesystem. Deler av disse elementer kan da opptre i stadium 2, dvs oppsprukket tilstand. Spørsmålet som da reises er hvilken stivhet som skal benyttes ved dynamiske beregninger. I den grad en benytter forenklede beregnings-metoder for dynamisk respons, dvs enfrihetsgradsystem, anbefales å gjennomføre beregningen for både stivhetene i Stadium 1 (uoppsprukket tverrsnitt) og Stadium 2 (oppsprukket tverrsnitt), og

avslutningsvis for en midlere stivhet mellom de to stadier. Den virkelige oppførsel vil ikke ligge langt unna den respons som fås ved midlere stivhet. (Det er i det aktuelle regneark ikke tatt med automatisk beregning av stivheter for oppsprukket tverrsnitt, men stivheter kan leses inn manuelt).

## E-modul

Betongens E-modul gir et vesentlig bidrag til en konstruksjons stivhet, og influerer derfor også frekvensberegningen (frekvens funksjon av roten av E-modul).

Det anbefales at dersom det ikke foreligger andre opplysninger, bør E-modulen settes lik standardens kortids-E-modul. (jfr NS 3473 pkt 9.2.1). Alternativt kan 10% økning av denne E-modulverdi benyttes i de her aktuelle dynamiske analyser.

## Dempning

Demping uttrykker hvor fort en svingning avtar og dør ut. Størrelsen er viktig i en svingeanalyse og vesentlig i tilfeller hvor resonansfenomener kan oppstå. Det defineres flere dempningstyper, knyttet til konstruksjon og materiale, men beregningsmessig samles de ofte i en ekvivalent hastighetsavhengig konstruksjonsdempning. Dempningen uttrykkes ofte ved forholdet (%) til kritisk dempning.

### Anbefalte verdier for dempning av betongelementer er

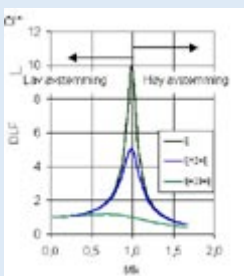
Forhold kritisk dempning:  $\lambda = 0,015 - 0,025$

(tilsvarer logaritmisk dekrement  $\delta = \lambda * 2\pi = 0,10 - 0,15$ )

I enkelte tilfeller kan det være nødvendig å innføre svingedempende tiltak. Det henvises til avsnitt 4.5.

## Masser

Som konstruksjonsstivhet influerer også de svingende masser konstruksjonens svingeforhold. Beregningsmessig benyttes i en-frihetsgradsmodellen konsentrert masse, dvs konstruksjonens egenmasse ekvivaleres med en konsentrert masse. Statisk nyttelast som svinger med et dekke, må tas med i beregning av masse. Likeså maskinelt utstyr som er festet til dekker betraktes som svingende masse. Personer som driver idrettsaktiviteter som feks aerobic, dvs "hopp og sprett", hvor de delvis er i kontakt med underlaget (gulvet), delvis i luften, bør ikke tas med i massen, så fremt de er i aktivitet. Står de derimot på gulvet etter hopp, er det korrekt å ta massen fra personen in i den beregningsmessige massen. Personer i sportsaktiviteter har normalt en plass på 2 m<sup>2</sup>

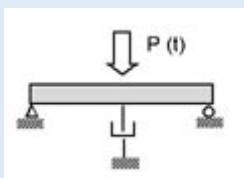


Figur 4.11

## 4.5 Svingedempende tiltak

Ved enkelte konstruksjoner kan det være aktuelt og nødvendig å innføre svingedempende tiltak. Det kan være tilfeller hvor bruksending av bygg har ført til installasjon av nye roterende maskiner, eller hvor nyetablering av idretts- og trimrom eller dansegulv er utført i bygg hvor det er benyttet slanke dekkelementer. Videre forekommer det også at svingeproblematikken er uteglemt eller neglisjert ved prosjekteringen av spesielle bygg og at svingedempende tiltak har vist seg å være nødvendig i ettertid.

Ved prosjektering er det viktig å unngå at lastfrekvensen eller et multiplum av denne faller sammen med en av konstruksjonens egenfrekvenser. Dette tydeliggjøres i frekvens-responsdiagrammet vist i figur 4.11 for et ett-frihetsgradsystem med konstant lasteksitasjon. Konstruktivt skal en velge systemer slik at en unngår resonans. Dersom en benytter betegnelsene høy og lav avstemning ("high and low tuning") og forutsetter at en har en viss konstruktiv frihet, kan en enten utforme konstruksjonen med en egenfrekvens høyere enn den høyeste relevante lastfrekvens (høy avstemning) eller utforme konstruksjonen med en egenfrekvens under den laveste lastfrekvens (lav avstemning). Det er derfor som generell anbefaling at dekkelementer benyttet i lokaler hvor det er idrettaktiviteter bør ha en egenfrekvens høyere enn 7 Hz.



Figur 4.12  
System med en frihetsgrad og demper



Figur 4.13  
Hydraulisk demper

De viktigste parametre for å unngå uønskede svingninger er frekvensforholdet konstruksjonsfrekvens/lastfrekvens og dempningsegenskapene. Konstruksjonens egenfrekvens influeres av konstruksjonens stivhet og masse. Valg av systemets spennvidde, bøyestivhet og masse er sterkt influerende på svingeegenskaper, men ofte gitt av ytre betingelser. Konstruksjonsdempning er ofte relativ liten, men muligheter for bygge inn dempere, gjør at en kan oppnå svingedempende resultater. I figur 4.13 er praktisk anvendelse av en hydraulisk demper vist.

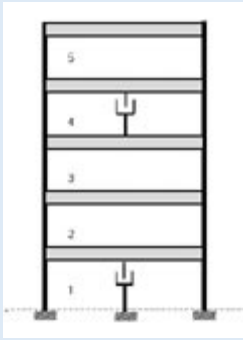
I det etterfølgende diskuteres mulige dempningstiltak.

### Eksempel

Det velges et eksempel til å illustrere mulige dempningstiltak for svingninger av dekker i et høybygg. Gulv i 2 og 5 etasje som består av betong hulldekker utsettes for svingninger p.g.a. bruksending av bygget. Svingningene forårsakes av menneskelige aktiviteter (eks. aerobic). Svingningene kan i enkelte situasjoner virke sjenerende og ønskes redusert.

#### Tilfelle 1

Dersom det lar seg gjennomføre å understøtte gulv i 2 etasje ved å anordne en støtte i 1 etasje, er dette enkleste måten å redusere svingningene på. Konstruksjonens egenfrekvens endres betydelig og resonansfenomener kan



Figur 4.14  
Bygning med mulig bruk av demper

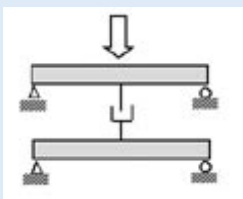
unngås. Det forutsettes at midtsøylen og dens fundament kan ta fulle søylelaster. Systemet beregnes som en kontinuerlig bjelke.

### Tilfelle 2

Dersom det kan anordnes en søyle som i tilfelle 1, men søylen kan ikke ta opp fulle søylelaster p.g.a. manglende fundamentering. Det kan da anordnes en demper med begrenset kraftopptak, men med effektiv damping. Systemet beregnes som bjelke med høy damping. Demperens karakteristikk (kraftfunksjon avhengig av svingehastighet) må spesifiseres.

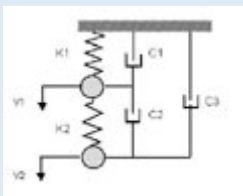
### Tilfelle 3

Her betraktes gulv i 5 etasje. Det forutsettes at det kan settes en søyle i 4 etasje og at det anordnes en demper mellom søyle og de to dekker. Alternativt, hvis søyle mellom etasjene ikke tolereres, men byggehøyde tillater en ekstrabjelke, enten underliggende eller som bjelkerist med demper, kan samme betraktningssmåte benyttes. Systemskisse er vist i figurene 4.15 og 4.16. Vi har et koblet system.



Figur 4.15  
Koblede bjelker

Systemet består nå av to bjelker med massene  $m_1$  og  $m_2$ , stivhetene  $k_1$ ,  $k_2$ , dempning  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ . Utsettes bjelke B1 for lasten  $P(t)$ , mens bjelke B2 utsettes for lasten som overføres påvirker B2 er hastighetsavhengig dvs avhengig av hastighetsdifferansen  $v_1-v_2$



Figur 4.16  
Systemskisse

Følgende relasjoner kan settes opp:

Ligningen for masse 1 hhv. masse 2 blir

$$m_1 \cdot \ddot{v}_1 + c_1 \cdot \dot{v}_1 - c_2 \cdot (\dot{v}_2 - \dot{v}_1) + k_1 \cdot v_1 = k_2 \cdot (v_2 - v_1) + P(t)$$

(Formel 4.1)

$$m_2 \cdot \ddot{v}_2 + c_2 \cdot (\dot{v}_2 - \dot{v}_1) + k_2 (v_2 - v_1) = 0$$

(Formel 4.2)

Beregningsprosedyren kan ved skrittvis tidsintegrasjon som vist i avsnitt 3.3, være som følgende:

- System 1 utsettes for inkrementell last innen et valgt tidsskritt. Det antas lineær akselelerasjon for system 1 innen det aktuelle tidsskritt, hvorpå hastighet ( $v_1$ ) og deformasjon beregnes.
- System 2 utsettes, gjennom demperen, for en hastighetsavhengig last, (hastighetsdifferanse mellom system 1 og system 2). For system 2 antas lineær akselerasjon, hvorpå hastighet ( $v_2$ ) og deformasjon beregnes.
- Kraft i demper p.g.a. hastighetsdifferanse ( $v_2-v_1$ ) influerer igjen last på system 1 i neste tidsskritt.

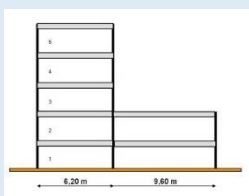


Ved skrittvis tidsintegrasjon kan samspillet mellom de to systemer ivaretas. Beregningsprosedyren er godt egnet til oppsett i regneark. Demperens karakteristikk kan defineres eller optimaliseres ved en beregningsmessig parameterstudie.

## 4.5 Beregningseksempler

For et eksisterende bygg som vist i figur 4.17 planlegges det utleie av annen etasje til helse-trimm-aktiviteter. Svingeforholdene ved Aerobic ønskes vurdert.

- Elementdata: HD285
- Elementlengde  $= 9,60 \text{ m}$
- Elementbredde  $b = 1,2 \text{ m}$
- Masse elementer  $m_e = 537 \text{ kg/m}^2$ , ( $M_e = 537 \cdot 9,60 \cdot 1,20 = 6186 \text{ kg}$ )
- Masse av personer  $m_p = 5 \cdot 70 \text{ kg /element}$  (5 personer) ( $M_p = 350 \text{ kg}$ )
- Arealtreghetsmoment  $I = 1,94 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$
- Betong C55
- Elastisitetsmodul  $E = 3,0 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$
- Konstruksjonsdepning settes 0,025
- Tidsintervall aerobic  $T = 0,4 \text{ sek}$ ,  $t = 0,2 \text{ sek}$



Figur 4.17  
Beregningseksempler

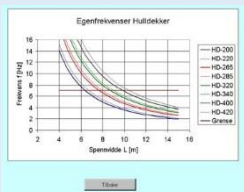
Fra diagram for HD285,  $L = 9,6 \text{ m}$  finner vi egenfrekvensen  $f \approx 5 \text{ Hz}$   
Betingelse  $f < 7$  ikke oppfylt for HD285:

Dersom en benytter den delen av bygget som har spennvidder på  $L = 6,2 \text{ m}$ ,  
avleser vi en egenfrekvens  
 $f \approx 10 \text{ Hz}$   
OK!

Tilfelle 1  $L = 9,6 \text{ m}$

|                           |                       |
|---------------------------|-----------------------|
| Beregnet egenfrekvens     | 5,05 Hz               |
| Svingetid                 | 0,198 sek             |
| Maks dynamisk deformasjon | 17,0 mm               |
| Maks hastighet            | 0,47 m/s              |
| Maks akselerasjon         | 15,7 m/s <sup>2</sup> |





Figur 4.18  
Frekvenskontroll

## Kommentar

Konstruksjonens egenvingetid er 0,198 sek, dvs svært nær lastimpulstiden, og halve latperioden. Vi er svært nær resonanstilfellet. Dette resulterer i beregningsmessig helt uakseptable svingninger mht akselerasjoner, hastigheter og deformasjoner. Det er slike tilfeller som må unngås.

|                                 |                       |
|---------------------------------|-----------------------|
| Tilfelle 2 $L = 6,20 \text{ m}$ |                       |
| Beregnet egenfrekvens           | 12,10 Hz              |
| Svingetid                       | 0,083 sek             |
| Maks dynamisk deformasjon       | 1,08 mm               |
| Maks hastighet                  | 0,018 m/s             |
| Maks akselerasjon               | 0,65 m/s <sup>2</sup> |

## Kommentar

Konstruksjonenes egenfrekvens ligger her godt over anbefalte minimumsverdier og det vil med den gitte lastfrekvens ikke oppstå resonansfenomener. Svingeamplitudene mht deformasjoner, hastigheter og akselerasjoner ligger her beregningsmessig på et helt annet nivå enn tilfelle 1.

Med en akselerasjon på  $0,65 \text{ m/s}^2 = 0,065 \text{ g}$  og en frekvens på 12 Hz vil svingningene være merkbare men under grensen for ubehagelige. De er som en kan forvente ved rytmiske aktiviteter (jfr figurene 2.2 og 2.3). Med en svingehastighet på 18 mm/sek beregnes en KB verdi (jfr figur 2,9) på ca 10 som kan akseptes som sjelden opptredende i spesielle områder. For en idrettshall vil svingninger av denne størrelse kunne aksepteres, men hvis det er et flerbruksbygg med kombinert idretts aktivitetsrom og kontor, bør en totalvurdering ut fra bruk av bygget mht plassering av idrettaktiviteter.

De overstående eksempler viser systemenes følsomhet. Tallrike eksempler fra virkeligheten viser at svært uønskede svingninger kan oppstå. Dersom en er klar over fenomenet kan uheldige svingninger unngås. I de fleste tilfeller der uheldige svingninger har oppstått, er det ved prosjekteringen "uteglemt".

## 4.6 Verifikasjon

Regnearket som her benyttes har blitt verifisert ved

- Sammenligning med uavhengig avansert beregningsprogram (Diana)

- Sammenlikning med utførte målinger

Ved sammenlikning med Diana er følgende eksempel benyttet:

- Elementdata: HD320
- Elementlengde  $l = 12,00$  m
- Elementbredde  $b = 1,2$  m
- Masse elementer  $m_e = 515$  kg/m1 ( $M_e = 515 \cdot 12,0 = 6186$  kg)
- Last av personer  $m_p = 5 \cdot 70$  kg /element
- (5 personer) ( $M_p = 350$  kg).  $P = 3500$  N
- Arealtreghetsmoment  $I = 2,42 \cdot 10^9$  mm<sup>4</sup>
- Betong C55
- Elastisitetsmodul  $E = 2,46 \cdot 10^4$  N/mm<sup>2</sup>
- Konstruksjonsdempning settes 0,025
- Tidsintervall aerobic  $T = 0,4$  sek,  $t = 0,2$  sek

Ved beregning med Diana som er et FE elementprogram er det her benyttet 12 klassiske to-punkts bjelkelementer (betegnelse L6BEN).

Resultatene er sammenstillt i tabell 4.1

Tabell 4.1 Sammenlikning beregnede resultater

|               | Dim              | Regneark | Diana |
|---------------|------------------|----------|-------|
| Eigenfrekvens | Hz               | 4,03     | 4,09  |
| Svingetid     | Sek              | 0,248    | 0,245 |
| Deformasjon   | mm               | 9,27     | 8,4   |
| Hastighet     | m/s              | 0,189    | 0,193 |
| Akselerasjon  | m/s <sup>2</sup> | 5,15     | 4,8   |

Utførte forsøk på tilsvarende dekke med 5 personer hoppende i takt ga følgende resultater

Eigenfrekvens: 4,0 Hz, Dempning: 0,025 (av kritisk dempning), akselerasjon 0,2 g (men med "peakverdi" ved hopp  $0,35 g = 3,5$  m/s<sup>2</sup>).

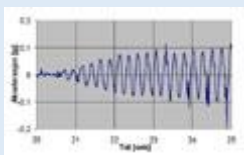
#### Kommentar

Sammenlikningen mellom beregningsresultater fra det aktuelle regneark både andre beregningsprogrammer og målinger tjener som verifikasjon.

## 5 Svingningsmålinger/utførelse av målinger

### 5.1 Hensikt

Hensikten med å gjennomføre svingningsmålinger er å kunne dokumentere og kvantifisere opptredende svingninger av konstruksjoner og konstruksjonselementer, for derved å sette dem i relasjon til normerte akseptkrav. Målinger kan også benyttes til å verifisere beregninger. Målinger kan videre gi et bilde av årsakssammenhenger hvis det er oppstått spesielle og uønskede opptredende svingninger i et bygg. Dersom det senere skal utføres utbedringsarbeider, vil det ved en verifisert beregningsmetode for den aktuelle konstruksjon, kunne gjennomføres parameterstudier for optimalisering av utbedringstiltak. Målinger før og etter utbedringsarbeider vil kunne dokumenterer eventuell nytten av slike. (Figur 5.1)

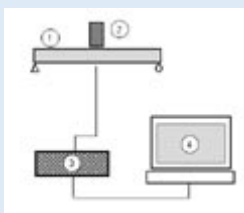


Figur 5.1  
Svingningsmålinger kan bidra til å dokumentere og kvantifisere opptredende svingninger.

### 5.2 Måleutstyr og måleprogram

Idet akseptkriteriene for svingninger ofte relateres til akselerasjoner, (se avsnitt 2), er det hensiktsmessig å gjennomføre akselerasjons-målinger. Til dette trengs ett eller flere akselerometre med tilstrekkelig følsomhet, dvs med et måleområde som fanger opp de opptredende svingninger og eventuelt filtrerer frekvenser utenfor de aktuelle konstruksjons-frekvenser, en datalogger for registrering og digitalisering av data samt datakraft (PC) med programvare for databehandling.

I figur 5.2 er det vist en prinsippskisse av et slikt måleutstyr mens i figur 5.3 er måleutstyr benyttet i praksis avbildet. (Akselerometer merke Hottinger 312/500, datalogger merke Hottinger Speider 8, samt en bærbar PC, Compac Armada med programvare for Hottinger Speider.).Alternativt kan det benyttes flere akselerometre for simultanmåling i flere punkter. Der det finnes fastpunkter eller 0-referanser, kan det benyttes forskyvningsgivere. Tøyninger kan registreres ved montasje av tøyningsgivere (strekkklapper). For belastninger hvor utmatting kan være aktuelt er tøyningsgivere egnet og programvare som teller frekvenser og antall svingninger på forskjellige spenningsnivå er nyttig ("rainflow").



Figur 5.2  
Prinsippskisse på enkelt måle-utstyr for akselerasjonsmålinger (1konstruksjon, 2 akselerometer, 3 datalogger, 4 PC)

Måleutstyret vist for akselerasjonsmålinger i figur 5.3 er lett transportabelt (bærbart) med enkel tilrigging. Det er tilstrekkelig for å kunne gi informasjon og for kvantifisering av svingninger relatert til kravspesifikasjoner. Prinsippielt kan en ut fra akselerasjonsmålinger beregningsmessig utlede svingehastigheter og deformasjoner. Dette setter imidlertid krav til numeriske integrasjonsrutiner av akselerasjonsdata.

Dersom det gjennomføres vibrasjonsmålinger bør det på forhånd settes opp et måleprogram, som systematisk inneholder kalibrering og kontroll av måleutstyr, fastleggelse av registreringstid og registreringsvarighet, plan for relevante målepunkter og rekkefølge av målinger, lastdefinisjoner og kontroll.



Figur 5.3  
Måleutstyr benyttet i praksis

Sikring og lagring av data, stikkprøvekontroll av resultater. Etterbehandling og presentasjon av resultater. 5.3 Evaluering av måleresultater

### 5.3 Evaluering av måleresultater

Ved presentasjon av måleresultater bør samtlige målebetingelser være kjent. Flere presentasjonsformer kan benyttes og det må skilles mellom snittverdier, maks og min-verdier, eventuell "støy", filtrering mm. En utskrift av de faktiske svingekurver kan gi et visuelt bilde. En visst "trenet øye" vil kunne forklare og tolke svingeforholdene. De statistiske verdier gir imidlertid de størrelser som en må forholde seg til.

Ved evalueringen bør både de konstruktive følger mht svingninger trekkes inn (sikkerhet) og videre bør de de akseptkrav mht menneskelige reaksjoner som er skissert under kapittel 2 trekkes inn. I spesielle tilfeller bør skjønn og erfaringsverdier kunne trekkes inn i vurderingene.

## Referanser

- [1] *Betongelementboken*  
BLF-Betongindustriens landsforening" Bind (A,B C,D) 1995
- [2] *Bachmann, H.; Amman, W.,*  
"Vibrations in Structures, Induced by Man and  
Machines. IABSE, Structural Engineering Documents nr 3e, 1987.
- [3] *Légeron, F; Le Moine, M; Paultre, P.*  
"Studies on the Vibration of Pedestrian Bridges"  
16th Congress of IABSE Lausanne 2000
- [4] *Mast, R.F.*  
"Vibration of Precast Prestressed Concrete Floors". PCI Journal November-  
December 2001
- [5] *ENV 1992-2*  
"Design of Concrete Structures – Part 2, Bridge". European Committee for  
Standardization, Brussels, Belgium 1996
- [6] *Bucholdt, H.A.*  
"Structural dynamics for engineers"  
Tomas Telford 1997
- [7] *Jensen, J.J.*  
"Svingninger av konstruksjoner"  
Nif Kurs

[8] "Design of structures to resist Nuclear Weapon Effects". ASCE manuals and Reports on Engineering Practice no 42.

[9] Gjestvang, Lund, Løseth"  
Dimensjonering av bygninger utsatt for vibrasjoner  
Veileder Utarbeidet for RIF, Rådgivende Ingeniørers Forening nov 2003.

[10] NS3490  
Prosjektering av konstruksjoner. Krav til pålitelighet  
Utgave juni 1999